**第4节 抽象函数问题**

**内容提要**

1．轴对称：如果函数满足若，就有，则的图象关于直线对称.

记法：自变量关于*a*对称，函数值相等，如图1.

2．中心对称：若函数满足若，就有，则关于点对称.

记法：自变量关于*a*对称，函数值关于*b*对称，如图2.



3．函数图象的对称轴和对称中心距离（规律：*x*系数相反是对称，*x*系数相同是周期）

|  |  |
| --- | --- |
| 或 | 关于直线对称（当时，即为偶函数，关于*y*轴对称） |
|  | 关于直线对称 |
|  | 关于对称（当时，即为奇函数，关于原点对称） |
|  | 关于点对称 |

4．双对称的周期结论（可借助三角函数辅助理解）：

（1）如果函数有两条对称轴，则一定是周期函数，周期为对称轴距离的2倍.

（2）如果函数有一条对称轴，一个对称中心，则一定是周期函数，周期为对称中心与对称轴之间距离的4倍.

（3）如果函数有在同一水平线上的两个对称中心，则一定是周期函数，周期为对称中心之间距离的2倍.

5．原函数与导函数的对称结论：（无需死记结论，想象图象，能理解就行）

（1）若存在导函数，且有对称中心，则必有对称轴. 特别地，若为奇函数，则为偶函数.

（2）若存在导函数，且有对称轴，则必有对称中心. 特别地，若为偶函数，则为奇函数.

（3）若有对称中心，则不一定有对称轴；但若，则一定有对称轴. 特别地，若为奇函数，则必为偶函数.

（4）若有对称轴，则必有对称中心. 特别地，若是偶函数，则不一定是奇函数，只能关于对称，但*b*不一定是0.

**典型例题**

【例1】已知函数满足，且在上为增函数，则（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：C

解析：的图象关于直线对称，所以，

因为，且在上为增函数，所以，从而.

【反思】本题的关键是由识别出的对称性.

【变式1】已知函数满足，且在上为增函数，则（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：D

解析：关于点对称，又在上，所以的草图如图，

由图可知在**R**上，所以.



【反思】本题只需由识别出的对称性，结合单调性想象图形就可以解题.

【变式2】已知函数满足，若函数有3个不同的零点、、，则 .

答案：3

解析：看到，马上想到的图象关于对称，

而要研究的零点，可以分离一下，再作图看交点，，

函数没给解析式，只能从对称的角度来看，

由于和的图象也都于对称，故它们的交点关于直线对称，如图，

设，则必有且，故.



【变式3】已知函数满足，若，则 .

答案：0

解析：，所以的图象关于点对称，

而，，，这几个函数值中，和3关于1对称，0和2关于1对称，

所以和有关系，和有关系，抓住这点就可以求了，

在中取可得，所以，

取可得，所以，故，

又，所以.

【例2】偶函数的图象关于直线对称，，则 .

答案：3

解析：由题意，有对称轴和，所以的周期为4，故.

【反思】对称轴对称轴周期，周期为对称轴之间距离的2倍.

【变式1】偶函数满足，且，则 .

答案：0

解析：由题意，关于点对称，

又为偶函数，所以关于*y*轴对称，从而的周期为4，故，

在取可求得，所以.

【反思】对称轴对称中心周期，周期为二者之间距离的4倍.

【变式2】（2018·新课标Ⅱ卷）若是定义域为的奇函数，满足，若，则（ ）

（A） （B）0 （C）2 （D）50

答案：C

解法1：首先由双对称，推出周期，下面给出结论的推导方法，

因为是奇函数，且，所以，故，

所以，即是以4为周期的周期函数，故，

接下来还需计算和，不能只由周期来求，要结合奇函数满足这个隐含条件，

在中取知，

又，所以，

故

.

解法2：也可以分析已知条件，举一个具体的函数来求解答案，

为奇函数有对称中心坐标原点，有对称轴，

既有对称轴又有对称中心，在三角函数中比较好找，结合，可取，

此时不难发现周期为4，，，，

所以

.

【变式3】（2021·新高考Ⅱ卷）已知函数的定义域为**R**，且是偶函数，是奇函数，则下列选项中值一定为0的是（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：B

解法1：先由题干的条件推导的对称性情况，是偶函数关于直线对称，

题干给出是奇函数，这个条件怎么翻译？

实际上，它和为奇函数效果一样，都能得出关于点对称，理由如下，

设，则是奇函数，所以，即，

从而，令，则，故，

所以关于点对称，从而周期为4，且，

又的图象关于对称，所以，故，选B.

解法2：也可以直接翻译已知条件，通过赋值来求解答案，但这种解法更抽象，

由题意，是偶函数，所以 ①，

又是奇函数，所以 ②，

在②中取得，所以，

已经得到一个等于0的函数值了，但没有这个选项，所以结合式①继续推理，

为了在式①中构造出，取得，故，

选项中还是没有，所以又结合式②继续推理，为了构造出，

在②中取得，所以选B.

【反思】若的图象关于点对称，且在处有定义，则必有.

【变式4】定义在**R**上的奇函数满足，当时，，则 .

答案：

解析：由题意，有对称中心和，故其周期为2，所以.

【反思】若有位于同一水平线上的两个对称中心，则为周期函数，周期为二者之间距离的2倍.

【例3】已知是函数的导函数，若为偶函数，且在点处的切线方程为，则 .

答案：1

解析：为偶函数的图象关于直线对称，

又在处的切线方程为，所以，，

因为的图象关于直线对称，所以，（关于对称的位置函数值相等）

且（关于对称的位置的切线也关于对称，斜率相反，如图），故.



【变式1】已知是函数的导函数，为奇函数，设，，且，则 .

答案：2

解析：先利用已知条件推出的对称性、周期性，再画草图看函数值，

为奇函数关于点对称，所以，又，所以，如图，

关于对称关于直线对称，

所以周期为4，且，，从而，

故

.



【变式2】（2022·新高考Ⅰ卷）（多选）已知函数及其导函数的定义域均为**R**，记，若，均为偶函数，则（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：BC

解析：先把已知的，均为偶函数翻译一下，可以翻译成和的对称性，

为偶函数的图象关于直线对称，

为偶函数的图象关于直线对称的图象关于点对称，（此处必须通过直观想象图形的样子，用的对称性反推的对称性，否则无法求解此题）

所以是以2为周期的周期函数（双对称周期结论），故也是以2为周期的周期函数，

A项，，而的值无法确定，故A项错误；

B项，周期为2，因为的图象关于直线对称，所以必是的极值，

从而，故，所以，故B项正确；

C项，的图象关于直线对称，故C项正确；

D项，周期为2，又的图象关于直线对称，所以的图象在和处的切线斜率互为相反数，从而，所以，故D项错误.

**强化训练**

1．（2022·成都模拟·★★★）已知函数满足，且在上为减函数，则（ ）

（A） （B）

（C） （D）

答案：B

解析：的图象关于直线对称，

结合在上为减函数可得当自变量与2的距离越大时，函数值越小，如图，

而，，，

所以，故.



2．（2022·甘肃模拟·★★★）定义在**R**上的奇函数满足，且当时，，则（ ）

（A） （B） （C）2 （D）8

答案：D

解析：关于对称，为奇函数关于原点对称，所以周期为8，

故.

3．（2021·湖北模拟·★★★）（多选）设是定义在**R**上的偶函数，且对任意的，都有，当时，，则（ ）

（A）是周期函数，且周期为2

（B）的最大值是1，最小值是

（C）在上单调递减，在上单调递增

（D）当时，

答案：BC

解析：A项，是偶函数关于对称，关于对称，所以是以4为周期的周期函数，故A项错误；

B项，当时，，结合是周期为4的偶函数可作出的大致图象如图，由图可知，，故B项正确；

C项，由图可知C项正确；

D项，由图可知在上，而在上，故D项错误.



4．（★★★）若是定义域为**R**的奇函数，，若，则 .

答案：1

解析：有对称中心和对称轴周期为4，

在中取知，

又，，所以，

故.

5．（★★★）已知函数，定义域为**R**的函数满足，若函数与的图象的交点为，，…，，则（ ）

（A）0 （B）5 （C）10 （D）15

答案：B

解析：没给解析式，给的是，只能得出对称性，所以也要研究的对称性，

注意到为奇函数，其图象关于原点对称，所以的图象关于点对称，

又，所以的图象也关于点对称，故与的交点关于点对称，

如图，由图可知，，，所以.



6．（2022·四川模拟·★★★）奇函数满足，若当时，，则函数的零点个数为 .

答案：9

解析：的图象关于点对称，

又为奇函数，所以的图象关于原点对称，所以的周期为2，

如图，与的图象共有9个交点，所以函数有9个零点.



7．（2022·江苏模拟·★★★）偶函数满足，当时，，则函数的所有零点之和为（ ）

（A）4 （B）6 （C）8 （D）10

答案：B

解析：的图象关于对称，为偶函数的图象关于*y*轴对称，

所以的周期为2，，作出图象如图，由图可知两图象有6个交点，

且它们两两关于直线对称，故的零点之和为6.



8．（★★★）已知是函数的导函数，若为奇函数，且在点处的切线方程为，则 .

答案：1

解析：为奇函数的图象关于点对称，

又在处的切线方程为，所以，，

因为的图象关于点对称，所以，（点和关于对称）

且（关于对称的位置的切线斜率相等，如图），故.



9．（★★★★）已知是函数的导函数，若和均为奇函数，且，则 .

答案：

解析：先把已知条件翻译成的对称性，再利用对称性求函数值，最好画个图比较容易理解，

为奇函数的图象关于点对称，所以，

为奇函数为偶函数的图象关于*y*轴对称，所以的周期为8，

因为，且关于对称，所以，

又为偶函数，且周期为8，所以，，

从而，

故



.

10．（2021·新课标Ⅱ卷·★★★★）设函数的定义域为**R**，为奇函数，为偶函数，当时，. 若，则（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：D

解析：为奇函数的图象关于点对称，所以，

为偶函数的图象关于直线对称，所以，

从而是以4为周期的周期函数，所以，

在中取可得，所以，

还得把*a*和*b*求出来才能得出答案，

在中取可得，

在中取得，所以，故，

在中取得，而，所以，故，

所以.

11．（2022·全国乙卷·理·12·★★★★）已知函数，的定义域均为**R**，且，. 若的图象关于直线对称，，则（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：D

解析：要求，得研究的性质，先用已知的把有关的消掉，

在中将*x*换成可得，所以，

代入可得，所以，故关于对称，

题干给出了关于对称，而和显然是有关系的，可以由此条件再推导的对称性，

由可得，将*x*换成可得，

从而可由左移4个单位，下移7个单位得到，故关于直线对称，

所以是以4为周期的周期函数，接下来求一个周期的整点函数值，就可以算出，

首先，关于对称，所以，故，

又关于对称，所以，结合周期为4可得，

只要求出和，就大功告成，条件中还没用，先在题干给的等式中将构造出来，

因为，在中取可得，所以，故，

由以及关于对称可得，结合周期为4可得，

所以.

12．（2022·新高考Ⅱ卷·★★★★）若函数的定义域为**R**，且，，则（ ）

（A） （B） （C）0 （D）1

答案：A

解法1：本题要，应该要先求的周期，可以在中对*y*赋值，

在中令可得 ①，

在①中将*x*换成可得，结合式①可得，

所以，从而，故，所以的周期为6；

求出了周期，接下来需要计算一个周期内的整点函数值，问题就解决了，

因为已知，所以可以在通过赋值构造出和其它的函数值，

在中令，可得，

又，所以，结合周期为6可得，

令可得，所以，

令，可得，所以，

在中令可得，令可得，

所以，故.

解法2：设，不难验证满足题干所有条件，进一步可求得.